

Programme de colles de Mathématiques

Calculs numériques

1. Fractions et puissances
 - PPCM et PGCD
 - Fractions : mise au plus petit dénominateur commun, somme, produit
 - Puissances (entières et racines nièmes)
2. Résolution d'équations
 - Équations polynomiales
 - Équations avec radicaux
 - Systèmes linéaires (par élimination seulement)
3. Inéquations
4. Valeur absolue : définition, équation et inéquation

Techniques de calcul algébrique

1. Sommes et produits finis
2. Sommes doubles
3. Sommes remarquables
 - Identités remarquables, somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique
 - Formule du binôme : coefficients binomiaux (définition avec les factorielles ; les étudiants ne doivent pas les introduire par des probabilités), triangle de Pascal, binôme de Newton

Logique et raisonnement

1. Énoncé - Théorème
2. Connecteurs logiques : et, ou, négation, implication, équivalence
3. Quantificateurs

Démonstrations à connaître :

- ⇒ Résoudre l'équation $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$ en posant $u = x + \frac{1}{x}$
- ⇒ Résoudre par élimination le système
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 24 \\ 4x - 2y + 3z = 6 \\ 6x - y + 2z = 22 \end{cases}$$
- ⇒ Montrer que, pour a, b et c distincts, on a $\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ et $\frac{a+b+c}{3} < \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$
- ⇒ Démontrer $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$
- ⇒ Énoncer et démontrer le triangle de Pascal
- ⇒ Énoncer et démontrer le binôme de Newton
- ⇒ Calculer de trois façons différentes $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$ (on explicitera les 3 méthodes de calcul, mais on ne simplifiera la résultat qu'à l'aide d'une méthode).
- ⇒ Calculer de deux façons différentes la somme $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.
- ⇒ Utiliser $(1+1)^n + (1-1)^n$ pour calculer $\sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1}$, où $n \in \mathbb{N}^*$