Programme de Colle 3

du lundi 5 octobre au vendredi 9 octobre

Chapitre 4 : Espaces vectoriels

- Familles libres, familles génératrices, bases, dimension
- Sous–espaces vectoriels, sous–espaces engendrés
- Sommes de sous–espaces, somme directe de deux sous–espaces, supplémentaire, formule de Grassmann
- Sommes directes de $p \in \mathbf{N}^*$ sous–espaces, caractérisation, concaténation de bases

Chapitre 5 : Applications linéaires

- Noyau et image
- Matrice représentative d'une application linéaire dans des bases
- Matrice de passage, changement de base,
- Matrices semblables (puissances de deux matrices semblable, polynôme de deux matrices semblables)
- Formes linéaires, projecteurs

Chapitre 6 : Réduction (début)

- Valeurs propres, vecteurs propres, sous–espaces propres (d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée)
- Cas des matrices triangulaires et diagonales
- Recherche des valeurs propres (méthode de Gauss ou polynôme annulateur)
- Somme directe de sous–espaces propres

Questions de cours

Question 1 :

Polynômes de Lagrange (exercice 21 des chapitres 4 et 5) : Soient $x_0, \dots, x_n$ des nombres réels distincts, on définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n$ de $\mathbf{R}_n[x]$ associés à $x_0, \dots, x_n$ par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

1. Pour tout $(k, j) \in [\![0, n]\!]^2$, calculer $L_k(x_j)$.
2. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[x]$.
3. (a) Déterminer la matrice des coordonnées d'un polynôme quelconque P de $\mathbf{R}_n[x]$ dans cette base.
   (b) En déduire la matrice de passage de la base $(L_0, \dots, L_n)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[x]$.

Question 2 :

Formes linéaires et hyperplans (exercices 11 et 22 des chapitres 4 et 5) :

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
   (a) Soit H un hyperplan de E, et soit $u \in E \setminus H$. Montrer que : $E = H \oplus \mathrm{Vect}(u)$.
   (b) En déduire que H est le noyau d'une forme linéaire non nulle $f : E \to \mathbf{R}$.
2. On note H_n l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
   (a) Justifier que H_n est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et donner sa dimension.
   (b) Trouver un supplémentaire de H_n

Question 3 :

Résultats théoriques sur les endomorphismes (exercices 25 et 26 des chapitres 4 et 5) :
Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que : $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
2. On suppose que f et g commutent. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Question 4 :

Exercice 24 du chapitre 6 (il s'agit aussi de l'exercice 26 du cahier de vacances dans lequel on trouve un corrigé) :
Soit E un espace vectoriel, et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme tel que la famille $(u, f(u))$ est liée pour tout $u \in E$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f = \lambda \mathrm{id}_E$.

Question 5 :

Exercice 3 du chapitre 6 avec un corrigé sur le site du cours de maths :
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.

1. Établir que $\dim \mathrm{Ker}\, A = 2$.
2. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$