Programme de Colle 5

du lundi 2 au vendredi 6 novembre

Chapitre 6 : Réduction (tout le chapitre)

- Valeurs propres, vecteurs propres, sous–espaces propres (d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée)
- Cas des matrices triangulaires et diagonales
- Recherche des valeurs propres (méthode de Gauss ou polynôme annulateur)
- Somme directe de sous–espaces propres
- Diagonalisation des endomorphismes et des matrices (définition, caractérisation)
- Condition suffisante de diagonalisation : une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable et ses sous–espaces propres sont de dimension 1.
- Trace d'une matrice diagonalisable

Chapitre 7 : Révisions en intégration (tout le chapitre)

- Notion de primitive, théorème fondamental de l'Analyse
- Convergence et convergence absolue
- Intégrales de référence
- Critère de comparaison d'intégrales de fonctions continues positives
- Intégration par parties, changement de variable
- Comparaison somme/intégrale

Questions de cours

Question 1 :

Factorisation d'un polynôme annulateur, cas des symétries (exercice 25 de le feuille d'exercices du chapitre 6) :
Soit $n \geqslant 1$, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ involutive, c'est–à–dire telle que $A^2 = I$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(I-A)$ et $\mathrm{Ker}(I+A)$ sont supplémentaires. En déduire que A est diagonalisable.
2. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \in [\![-n, n]\!]$. Étudier la parité de $\mathrm{Tr}(A)$ en fonction de celle de n.

Question 2 :

Diagonalisation simultanée (exercice 23 de la feuille du chapitre 6) :

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que chaque sous–espace propre de f est stable par g.
2. On suppose de plus que f admet n valeurs propres distinctes.
   (a) Justifier que f est diagonalisable.
   (b) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots e_n)$ de E telle que chaque e_i est vecteur propre de f et de g.

Question 3 :

Lemme de Riemann–Lebesgue (exercice 5 de la feuille d'exercices du chapitre 7) :

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe un réel M tel que, pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)| \leqslant M$ et $\left|f'(t)\right| \leqslant M$.
2. Montrer que : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t = 0$.
3. En déduire que : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t = 0$.

Question 4 :

Une suite d'intégrales (exercice 10 de le feuille d'exercices du chapitre 7) :

Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$ et on admet que cette intégrale converge.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}$.

   (b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

2. (a) Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante.

   (c) En déduire que $\dfrac{1}{2n} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}$ pour tout $n \geqslant 2$.

Question 5 :

Développement en série entière du logarithme (exercice 8 page 13 du polycopié de cours) :

On considère un nombre x appartenant à $[0,1[$.

1. (a) Vérifier, pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et tout t de $[0,x]$: $\dfrac{1}{1-t} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$.

   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $-\ln(1-x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.

2. Montrer, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

   En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

3. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)}$.