Programme de Colle 4

du lundi 12 octobre au vendredi 16 octobre

Chapitre 4 : Espaces vectoriels

- Familles libres, familles génératrices, bases, dimension
- Sous–espaces vectoriels, sous–espaces engendrés
- Sommes de sous–espaces, somme directe de deux sous–espaces, supplémentaire, formule de Grassmann
- Sommes directes de $p \in \mathbf{N}^*$ sous–espaces, caractérisation, concaténation de bases

Chapitre 5 : Applications linéaires

- Noyau et image
- Matrice représentative d'une application linéaire dans des bases
- Matrice de passage, changement de base,
- Matrices semblables (puissances de deux matrices semblable, polynôme de deux matrices semblables)
- Formes linéaires, projecteurs

Chapitre 6 : Réduction

- Valeurs propres, vecteurs propres, sous–espaces propres (d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée)
- Cas des matrices triangulaires et diagonales
- Recherche des valeurs propres (méthode de Gauss ou polynôme annulateur)
- Somme directe de sous–espaces propres
- Diagonalisation des endomorphismes et des matrices
- Trace d'une matrice

Questions de cours

Question 1 :

Polynômes de Lagrange (exercice 21 des chapitres 4 et 5) : Soient $x_0, \dots, x_n$ des nombres réels distincts, on définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n$ de $\mathbf{R}_n[x]$ associés à $x_0, \dots, x_n$ par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

1. Pour tout $(k, j) \in [\![0, n]\!]^2$, calculer $L_k(x_j)$.
2. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[x]$.
3. (a) Déterminer la matrice des coordonnées d'un polynôme quelconque P de $\mathbf{R}_n[x]$ dans cette base.
   (b) En déduire la matrice de passage de la base $(L_0, \dots, L_n)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[x]$.

Question 2 :

Résultats théoriques sur les endomorphismes (exercices 25 et 26 des chapitres 4 et 5) :
Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que : $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
2. On suppose que f et g commutent. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Question 3 :

Polynôme annulateur, matrice J_n et réduction (Exercice 6 de la feuille d'exercices du chapitre 6) :
Soit $n \geqslant 1$, et soit J_n la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients valent 1.

1. Calculer J_n^2, en déduire un polynôme annulateur de J_n.
2. Déterminer $\mathrm{Sp}(J_n)$ ainsi qu'une base de chaque sous–espace propre de J_n.
3. Justifier que J_n est diagonalisable. Donner une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $J_n = PDP^{-1}$.

Question 4 :

Condition suffisante de diagonalisabilité (Exercice 14 de la feuille d'exercices du chapitre 6) :
Pour tout polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$, on note :

$$\varphi(P) = 4XP'(X) - P''(X).$$

1. Montrer que l'application $\varphi\colon P \mapsto \varphi(P)$ définit un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.
3. Vérifier que le polynôme $3X - 4X^3$ est un vecteur propre de φ pour une valeur propre à préciser.
4. Montrer que φ est diagonalisable et préciser la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

Question 5 :

Matrice diagonalisable avec une seule valeur propre (Exercice 17 de la feuille d'exercices du chapitre 6) :
Soit M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice M est-elle diagonalisable ?