Programme de Colle 1

du lundi 21 septembre au vendredi 2 octobre

Chapitre 1 : Rappels sur les suites et les fonctions

- Suites récurrentes, suites implicites, suites adjacentes, limites
- Fonctions d'une variable réelle : continuité, dérivabilité, convexité, fonctions trigonométriques
- Étude locale de fonction : comparaison, formules de Taylor, développement limités
- Étude asymptotique de suite : négligeabilité, équivalents

Chapitre 2 : Rappels sur les sommes et les séries

- Sommes classiques (sommes des entiers et somme géométrique), sommes télescopiques, sommes doubles
- Séries usuelles (les trois géométriques, la série exponentielle et les séries de Riemann), séries télescopiques
- Séries à termes positifs

Chapitre 3 : Rappels sur les probabilités discrètes

- Théorème de la limite monotone
- Probabilités conditionnelles, indépendance
- Moments : espérance, théorème de transfert, variance

Questions de cours

Question 1 :

Application de la formule de l'espérance totale (exercice 7 du polycopié de cours) : Pour commencer, on lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir pile, on note N le nombre de lancers effectués. Ensuite, on lance N fois la même pièce, et on note X le nombre de lancers donnant pile.

1. Reconnaître la loi de N, puis reconnaître la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$ où $n \in \mathbf{N}^*$.
2. Donner l'espérance conditionnelle $E(X|N = n)$. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Question 2 :

Application du théorème de la limite monotone (exercice 9 de la feuille de TD) :
Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ converge, on pose :

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad \text{et} \quad B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

1. Établir que : $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P(B)$.
2. (a) Montrer que, si C et D sont deux évènements, alors $P(C \cup D) \leqslant P(C) + P(D)$.
   (b) En déduire que : $P(B_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$.
3. Conclure que $P(B) = 0$.

Question 3 :

Donner les propriétés de la variance : formule de Kœnig–Huygens, positivité avec carcactérisation du cas d'égalité, comportement vis–à–vis d'une transformation affine.

Application (exercice 16 de la feuille de TD) : Soit X une variable aléatoire discrète admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et telle que :

$$E(X) = \alpha \quad \text{et} \quad E\left(X^2\right) = E\left(X^4\right) = 1.$$

1. Montrer que $\alpha \in [-1, 1]$
2. Déterminer la loi de X.

Question 4 :

Application des développements limités et des fonctions trigonométriques (feuille d'exercices du chap. 1) :

1. A l'aide de développements limités usuels, montrer que lorsque x est au voisinage de 0 on a :

$$\ln\left(2 - e^x\right) = -x - x^2 + o(x^2).$$

2. (a) Soient $k, t \in \mathbf{R}$. Utiliser la formule du cours concernant $\sin(a+b)$ pour simplifier :

$$\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)t\right).$$

(b) En déduire qu'il existe une constante M à déterminer telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall t \in]0, 2\pi[, \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin(\frac{t}{2})} + M.$$

Question 5 :

Série harmonique et constante γ (§3.1 du chap. 2), l'examinateur choisira une des deux questions :

1. (a) Établir : $\forall k \geqslant 1\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.

(b) En déduire que $\ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1$ pour tout $n \geqslant 1$. Puis montre que $\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. On pose $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_{n+1} - u_n$ converge vers un nombre γ.

(b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ lorsque $n \to +\infty$.